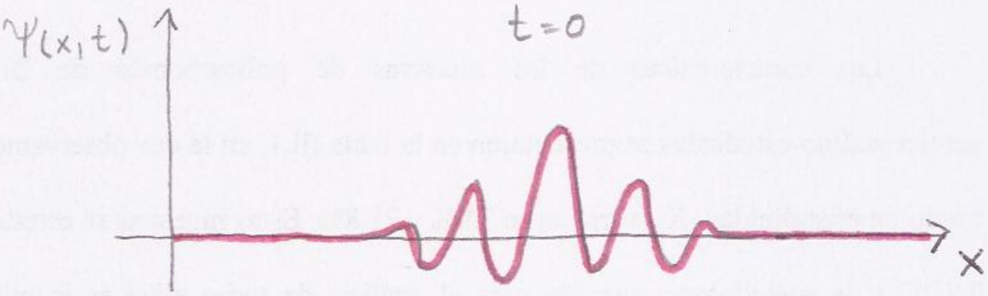
# Velocidad de fase y Velocidad de grupo

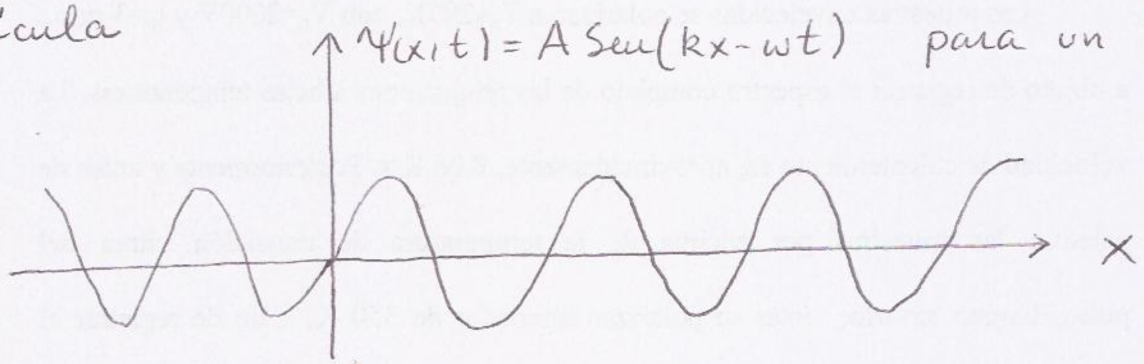
✓ Si una onda determina la probabilidad de existencia de una partícula en un punto del espacio en un tiempo dado, debería lucir, por ejemplo, en $t=0$ como




✓ La partícula debería encontrarse justo donde la onda tenga amplitudes apreciables.

✓ Una onda del tipo $\Psi(x,t) = A \operatorname{Sen}(kx - \omega t)$ con $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ y $\omega = 2\pi\nu$, no puede representar a una partícula

para un t dado



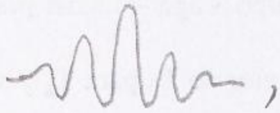

porque, según esta onda, la partícula tendría igual probabilidad de ser encontrada en cualquier punto del espacio lo cual no tiene sentido. Se supone que la partícula se está moviendo a lo largo del eje x y que la probabilidad de que esté en el punto donde se encuentra en un momento determinado es máxima y por supuesto distinta a la probabilidad de encontrarse en cualquier otro punto.

Los nodos de la onda $\Psi(x,t) = A\,\mathrm{Sen}(kx - \omega t)$ se encuentran en posiciones $x_n$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ tal que $k x_n - \omega t = n\pi$

$$\Rightarrow k x_n = n\pi + \omega t \quad \Rightarrow \quad x_n = \frac{n\pi}{k} + \frac{\omega}{k} t \qquad (1)$$

Los nodos de la onda (y en realidad todos los puntos de la onda) se mueven a lo largo del eje $x$ con una velocidad

$$v = \frac{dx_n}{dt} = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi\nu}{2\pi/\lambda} = \nu\lambda \qquad (2)$$

Para tener una onda como , debemos sumar varias ondas del tipo $\mathrm{Sen}(kx - \omega t)$ con distintos valores de $k$ y $\omega$.

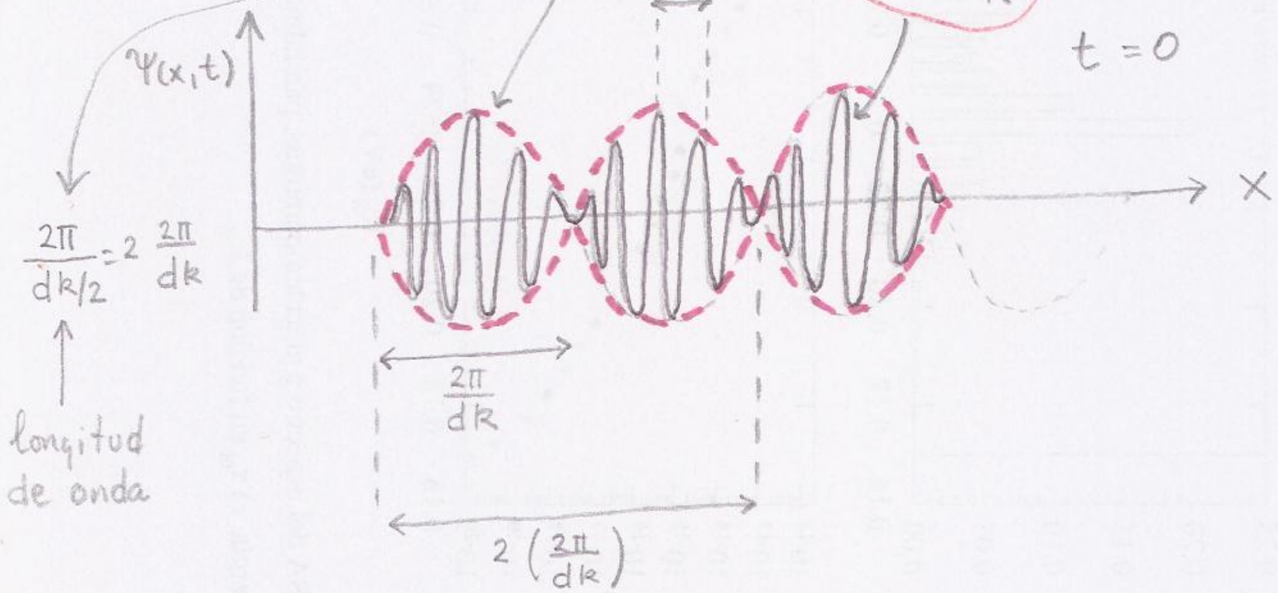
Si se suman dos ondas $\Psi_1 = \mathrm{Sen}(kx - \omega t)$ y $\Psi_2 = \mathrm{Sen}((k + dk)x - (\omega + d\omega)t)$, considerando que $\mathrm{Sen}\,A + \mathrm{Sen}\,B = 2\,\mathrm{Cos}\left(\frac{A-B}{2}\right)\mathrm{Sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)$,

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 = 2\,\mathrm{Cos}\left(\frac{dk}{2}x - \frac{d\omega}{2}t\right)\mathrm{Sen}\left(\frac{2k + dk}{2}x - \frac{2\omega + d\omega}{2}t\right)$$

Si $dk \ll 2k$ y $d\omega \ll 2\omega$

$$\psi = 2\cos\left(\frac{dk}{2}x - \frac{d\omega}{2}t\right)\,\mathrm{Sen}\left(kx - \omega t\right) \qquad (3)$$

$\lambda = \frac{2\pi}{k}$




Velocidad de fase $\quad v_{phase} = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi\nu}{2\pi/\lambda} = \nu\lambda \qquad (4)$

Velocidad de grupo $\quad v_{grupo} = \frac{d\omega/2}{dk/2} = \frac{d\omega}{dk} \qquad (5)$

$$v_{grupo} = \frac{d\omega}{dk} = 2\pi\frac{d\nu}{dk} = \frac{2\pi d(E/h)}{d(2\pi/\lambda)} = \frac{d(E/h)}{d\left(\frac{p}{h}\right)} = \frac{dE}{dp} \qquad (6)$$

Si $E = \frac{mv^2}{2} = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow v_{grupo} = \frac{2p}{2m} = v$ ✓ $\qquad (7)$

La velocidad de grupo de las ondas materiales es igual a la velocidad de la partícula que es "guiada" o "gobernada" por dichas ondas. La misma conclusión se obtiene si se usan las expresiones relativistas de $E$ y $p$ para calcular $dE/dp$.

¿Cómo se construye un pulso o un "paquete" de ondas?

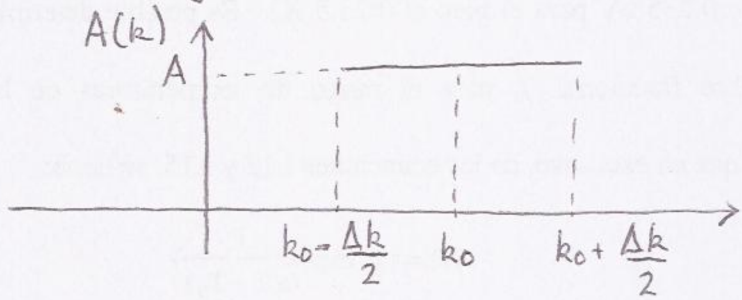
Se suman varias ondas sinusoidales con distintos valores de $k$ y $\omega$ ( $\psi_k = A_k \operatorname{Sen}(kx-\omega t)$ o $B_k \operatorname{Cos}(kx-\omega t)$ )

Supongamos que en $t=0$ tenemos una suma discreta de funciones oscilatorias

$$\psi = \sum_k A_k \operatorname{Cos}(kx) \qquad (8).$$

Supongamos ahora que las ondas que se desea superponer tienen valores de $k$ continuos alrededor de un valor $k_0$ y que además las amplitudes de las ondas son iguales (para simplificar el cálculo sin perder la interpretación física). De este modo, la sumatoria (8) se transforma en una integral (integral de Fourier)

$$\psi(x) = \int A(k) \operatorname{Cos}(kx)\, dk \qquad (9)$$




Ondas y Física Cuántica (D. Figueroa, pag. 266, PR. 6-09)

$$\Psi(x) = \int A(k)\cos(kx)\,dk = A\int_{k_0-\frac{\Delta k}{2}}^{k_0+\frac{\Delta k}{2}} \cos(kx)\,dk$$

$$\Psi(x) = A\,\frac{\operatorname{Sen}(kx)}{x}\Bigg|_{k_0-\frac{\Delta k}{2}}^{k_0+\frac{\Delta k}{2}}$$

$$\Psi(x) = \frac{A}{x}\left[\operatorname{Sen}\left(k_0+\frac{\Delta k}{2}\right)x - \operatorname{Sen}\left(k_0-\frac{\Delta k}{2}\right)x\right]$$

$$= \frac{A}{x}\Big[\operatorname{Sen}(k_0x)\cos\left(\frac{\Delta k}{2}x\right) + \operatorname{Sen}\left(\frac{\Delta k}{2}x\right)\cos(k_0x)$$

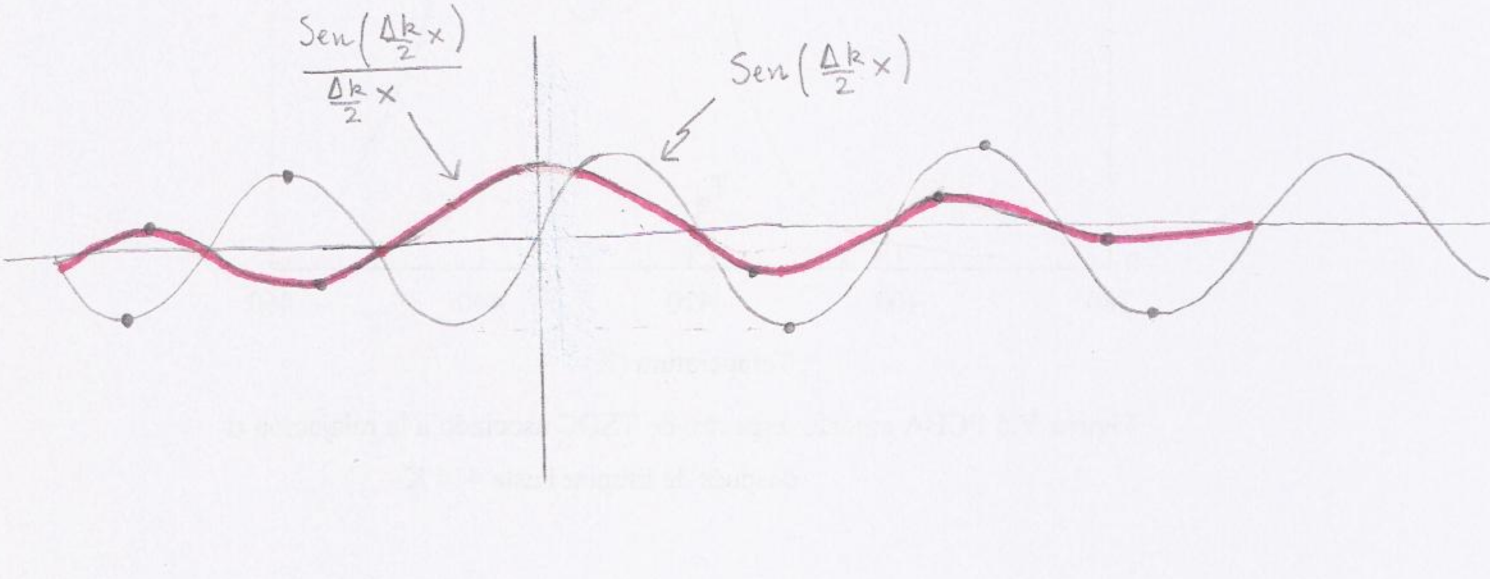
$$- \left\{\operatorname{Sen}(k_0x)\cos\left(\frac{\Delta k}{2}x\right) - \operatorname{Sen}\left(\frac{\Delta k}{2}x\right)\cos(k_0x)\right\}\Big]$$

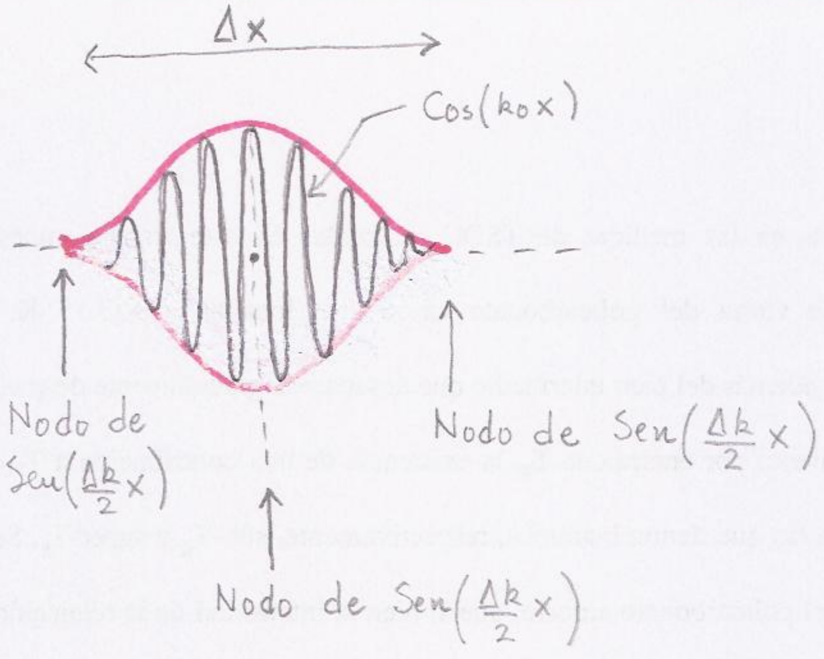
$$\Psi(x) = \frac{2A}{x}\operatorname{Sen}\left(\frac{\Delta k}{2}x\right)\cos(k_0x) \qquad (10)$$

La ecuación (10) puede escribirse como

$$\Psi(x) = \frac{2A\left(\frac{\Delta k}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta k}{2}x\right)}\operatorname{Sen}\left(\frac{\Delta k}{2}x\right)\cos(k_0x)$$

Cuando $x \to 0 \Rightarrow \Psi(x=0) = A(\Delta k) \neq 0$






Los nodos de $\text{Sen}\left(\frac{\Delta k}{2} x\right)$ ocurren en posiciones $x_n$ tales que

$$\frac{\Delta k}{2} x_n = n\pi \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \qquad (11)$$

De la figura $\Delta x = x_1 - x_{-1} = \frac{2\pi}{\Delta k}(1-(-1)) = \frac{4\pi}{\Delta k}$

$$\Rightarrow \quad \Delta x \, \Delta k = 4\pi \qquad (12)$$

$\Rightarrow$ $\Delta x$ es inversamente proporcional a $\Delta k$

Mientras mayor es el rango de los valores de $k$ de las ondas que se suman, menor será el "tamaño" $\Delta x$ del grupo de ondas.

Lo mejor que se puede lograr "sumando ondas" es

$$\Delta x \, \Delta k = \frac{1}{2} \qquad (13)$$

( E-R, pag. 102
Ec. 3.14
$k = 2\pi \kappa$ )
KAPPA

En general $\Delta x \, \Delta k \geq \frac{1}{2}$ (14)

Si en lugar de hacer la integral de Fourier en el "espacio k" se hubiese hecho en el "espacio ω", esto es, si por ejemplo, fijamos el valor de X y cambiamos la sumatoria (8) por

$$\Psi(t) = \sum_{\omega} A_\omega \operatorname{Cos}(\omega t) \qquad (15)$$

y luego en el continuo de ω :

$$\Psi(t) = \int A(\omega) \operatorname{Cos}(\omega t)\, d\omega \qquad (16),$$

entonces, haciendo un análisis similar al que se hizo con el "espacio k", se obtiene (en el mejor de los casos)

$$\Delta t \, \Delta \omega \geqslant \frac{1}{2} \qquad (17)$$

La ecuación (17) puede interpretarse como sigue: Un grupo ó paquete de ondas ó pulso (de tamaño finito pasa por un punto de observación del espacio ( x fijo) durante un tiempo limitado. Si Δt es el tiempo que tárdó el pulso en pasar por el mencionado punto de observación, entonces el pulso necesariamente debe estar compuesto por ondas sinusoidales cuyos valores de ω se encuentran en un rango continuo Δω.

✓ Dicho de otra forma: Para que un pulso dure un tiempo $\Delta t$ (pasando por un punto del espacio) las frecuencias $\omega$ de las ondas que forman al pulso, deben estar en un rango $\Delta\omega$.

✓ Recordando el análisis que se hizo en el "espacio k", habría que decir en forma análoga:

Para que un pulso tenga un ancho $\Delta x$ (en un tiempo dado; "como si se tomara una foto del pulso"), los números de onda $k$ de las ondas que forman al pulso, deben estar en un rango $\Delta k$.

✓✓✓ Las ecuaciones $\Delta x\, \Delta k \geq 1/2$ y $\Delta t\, \Delta\omega \geq 1/2$ son propiedades universales de todas las ondas.

✓ Si aplicamos estas expresiones a las ondas materiales combinándolas con las relaciones de De-Broglie y Einstein ($p = \frac{h}{\lambda}$ y $E = h\nu$) obtenemos

a) $\Delta x\, \Delta k = \Delta x\, \Delta\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) = \Delta x\, \Delta\left(\frac{2\pi p_x}{h}\right) = \frac{\Delta x\, \Delta p_x}{\hbar} \geq \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \Delta x\, \Delta p_x \geq \hbar/2 \qquad (18)$$

b) $\Delta t\, \Delta\omega = \Delta t\, \Delta(2\pi\nu) = \Delta t\, \Delta\left(2\pi \frac{E}{h}\right) = \frac{\Delta t\, \Delta E}{\hbar} \geq \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \Delta t\, \Delta E \geq \hbar/2 \qquad (19)$$

## Conclusión:

✓ Hacer una medición física implica necesariamente una interacción entre el que mide (observador) y el sistema que se mide (que se observa).

✓ Las partículas materiales y la radiación son entes con los cuales se pueden hacer mediciones.

✓ Las relaciones $p = h/\lambda$ y $E = h\nu$ aplican tanto para partículas materiales como para radiación (fótones). Ellas representan la Dualidad Onda-Partícula

✓ Cuando se combinan estas relaciones con las propiedades universales de las ondas, se obtienen las relaciones de incertidumbre.

✓ Esto quiere decir que el principio de incertidumbre es una consecuencia de la Dualidad Onda-Partícula, esto es de las relaciones de De-Broglie y Einstein ($p = h/\lambda$ y $E = h\nu$)

✓ El principio de incertidumbre es la base para que Heisenberg y Bohr (1927) dijeran que la probabilidad es fundamental para la física cuántica.

✓ Leer y hacer Ejemplos 3.5, 3.6 y 3.7, Eisberg-Resnick. Leer Sección 3.5.